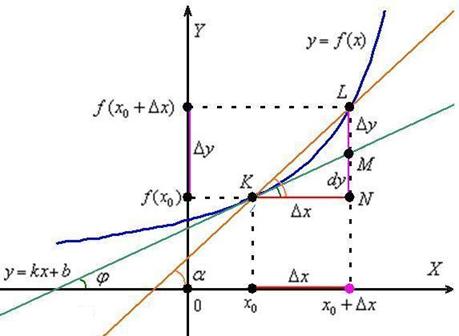
|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Место занятия в расписании** | | **Тема** | **Цели** | | **Задачи** | **Контрольные вопросы и задания** | **Д/з** |
| Дата | 02.11.21 | **Понятие производной и техника дифференцирования.** | Дидактическая | Повторить, обобщить и закрепить знания, умения и навыки по понятию производной элементарной и сложной функции, рассмотреть технику дифференцирования неявной функции и функции, заданной параметрически, начать формирование умений и навыков решения задач в рамках данной темы. | 1) Повторить, обобщить и закрепить знания, умения и навыки по понятию производной элементарной и сложной функции.  2) Рассмотреть технику дифференцирования неявной функции и функции, заданной параметрически.  3) Начать формирование умений и навыков решения задач в рамках данной темы. | 1) Как определяется производная?  2) Назовите правила дифференцирования.  3) Как найти производную элементарной функции?  4) Как найти производную сложной функции?  5) Как найти производную неявной функции?  6) Как найти производную функции, заданной параметрически? | **Изучить и составить конспект, решить задание из конспекта**  **№1.**  **Найти производные функций:** |
| Группа | 2ТЭМ | Развивающая | Развивать логическое и пространственное мышление. |
| Пара | IV | Воспитательная | Воспитывать любознательность и самостоятельность. |
| № занят. | 22 |

Подтвердите своё присутствие на занятии. Составьте конспект в соответствии с требованиями. Фото конспекта отправьте на почту **elenabragina7@gmail.com** до 02.11.21 включительно. Работа должна быть выполнена в рамках рабочего времени, отведенного на занятие по математике. **Чтобы все формулы и символы открылись, необходимо файл скачать на рабочий стол.**

**02.11**

**Понятие производной и техника дифференцирования.**

**1) Актуализация опорных знаний (интеграция с ОДП.01Математика). Повторим, обобщим и систематизируем понятие производной (записать в конспект выделенное).**

**Рассмотрим функцию http://mathprofi.ru/i/opredelenie_proizvodnoi_smysl_proizvodnoi_clip_image002_0001.gif (синий график), которая**[**определена**](http://mathprofi.ru/oblast_opredeleniya.html)**и непрерывна на некотором интервале, произвольную точку http://mathprofi.ru/i/opredelenie_proizvodnoi_smysl_proizvodnoi_clip_image077.gif, принадлежащую данному интервалу, и соответствующее значение http://mathprofi.ru/i/opredelenie_proizvodnoi_smysl_proizvodnoi_clip_image079.gif:  
**

**Определение: производной функцииhttp://mathprofi.ru/i/opredelenie_proizvodnoi_smysl_proizvodnoi_clip_image002_0001.gif в точке http://mathprofi.ru/i/opredelenie_proizvodnoi_smysl_proizvodnoi_clip_image106.gif называется предел отношения приращения функции http://mathprofi.ru/i/opredelenie_proizvodnoi_smysl_proizvodnoi_clip_image108.gif к вызвавшему его приращению аргумента http://mathprofi.ru/i/opredelenie_proizvodnoi_smysl_proizvodnoi_clip_image023_0003.gif в этой точке при http://mathprofi.ru/i/opredelenie_proizvodnoi_smysl_proizvodnoi_clip_image075_0000.gif. Или коротко:  
Определение функции в точке**

**Если данный предел конечен, то функция http://mathprofi.ru/i/opredelenie_proizvodnoi_smysl_proizvodnoi_clip_image002_0002.gif является дифференцируемой в точке http://mathprofi.ru/i/opredelenie_proizvodnoi_smysl_proizvodnoi_clip_image106_0000.gif.**

**Функция дифференцируема на интервале, если она дифференцируема в каждой точке этого интервала.**

К появлению понятия производной может привести решение некоторых практических задач.

Самыми известными среди них является задача о построении касательной к графику функцииhttp://mathprofi.ru/i/opredelenie_proizvodnoi_smysl_proizvodnoi_clip_image002_0002.gifв точке http://mathprofi.ru/i/opredelenie_proizvodnoi_smysl_proizvodnoi_clip_image106_0000.gif, которую решил Готфрид Лейбниц, и задача о нахождении скорости материальной точки при прямолинейном и равномерном движении, которую решил Исаак Ньютон.

В общем, **производная - это скорость изменения любого процесса.**

Для функции http://mathprofi.ru/i/opredelenie_proizvodnoi_smysl_proizvodnoi_clip_image002_0002.gifпроизводную будем обозначать у' или f '(x).

**2)** **Актуализация опорных знаний (интеграция с ОДП.01Математика). Обобщим и закрепим умения и навыки вычисления производной элементарной функции (записать в конспект).**

Производную элементарной функции можно найти, пользуясь определением производной. Но это слишком сложное и трудоёмкое решение.

Поэтому для вычисления производной мы будем применять в начале правила дифференцирования:

|  |
| --- |
| 1. |
| 2. |
| 3. |
| 4. |
| 5. |

а затем таблицу производных элементарных функций:

|  |  |
| --- | --- |
| 1. | 12. |
| 2. | 13. |
| 3. | 14. |
| 4. | 15. |
| 5.  ()' = | 16. |
| 6. | 17. |
| 7. | 18. |
| 8. | 19. |
| 9. | 20. |
| 10. | 21. |
| 11. | 22. |

Пример 1. Вычислить производные элементарных функций:

1. Найти производную функции http://mathprofi.ru/f/kak_naiti_proizvodnuju_clip_image028.gif

Смотрим в таблицу производных. Производная косинуса там есть, но у нас http://mathprofi.ru/f/kak_naiti_proizvodnuju_clip_image030.gif.

Решаем:

http://mathprofi.ru/f/kak_naiti_proizvodnuju_clip_image032.gif

Самое время использовать правило 1, выносим постоянный множитель за знак производной:

http://mathprofi.ru/f/kak_naiti_proizvodnuju_clip_image034.gif

А теперь по таблице:

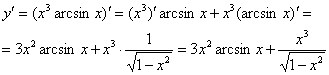
http://mathprofi.ru/f/kak_naiti_proizvodnuju_clip_image036.gif

Ну и результат желательно немного «причесать» – ставим минус на первое место, заодно избавляясь от скобок:

http://mathprofi.ru/f/kak_naiti_proizvodnuju_clip_image038.gif.

2. Найти производную функции http://mathprofi.ru/f/kak_naiti_proizvodnuju_clip_image062.gif

Здесь у нас произведение двух функций, зависящих от http://mathprofi.ru/f/kak_naiti_proizvodnuju_clip_image064.gif.  
Сначала применяем 3 правило, а затем таблицу производных:

****

3. Найти производную функции http://mathprofi.ru/f/kak_naiti_proizvodnuju_clip_image068.gif

В данной функции содержится сумма http://mathprofi.ru/f/kak_naiti_proizvodnuju_clip_image070.gif и произведение двух функций –  квадратного трехчлена http://mathprofi.ru/f/kak_naiti_proizvodnuju_clip_image072.gif  и логарифма http://mathprofi.ru/f/kak_naiti_proizvodnuju_clip_image074.gif. Со школы мы помним, что умножение и деление имеют приоритет перед сложением и вычитанием.

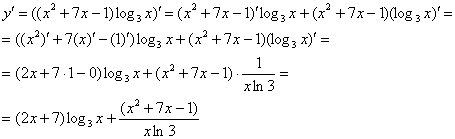
Здесь всё так же. **СНАЧАЛА** мы используем правило дифференцирования произведения 3:

http://mathprofi.ru/f/kak_naiti_proizvodnuju_clip_image076.gif

Теперь для скобки http://mathprofi.ru/f/kak_naiti_proizvodnuju_clip_image078.gif используем два первых правила:

http://mathprofi.ru/f/kak_naiti_proizvodnuju_clip_image080.gif

В результате применения правил дифференцирования под штрихами у нас остались только элементарные функции, по таблице производных получаем:



**4. Найти производную функции http://mathprofi.ru/f/kak_naiti_proizvodnuju_clip_image091.gif**

Чего здесь только нет – сумма, разность, произведение, дробь…. С чего бы начать?! Есть сомнения, нет сомнений, но, **В ЛЮБОМ СЛУЧАЕ** для начала рисуем скобочки и справа вверху ставим штрих:

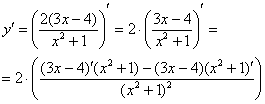
http://mathprofi.ru/f/kak_naiti_proizvodnuju_clip_image093.gif

Теперь смотрим на выражение в скобках, как бы его упростить? В данном случае замечаем множитель, который согласно первому правилу целесообразно вынести за знак производной:

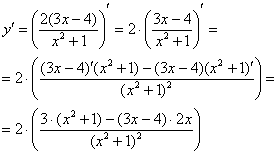
http://mathprofi.ru/f/kak_naiti_proizvodnuju_clip_image095.gif

Заодно избавляемся от скобок в числителе, которые теперь не нужны.  
Вообще говоря, постоянные множители при нахождении производной можно и не выносить, но в этом случае они будут «путаться под ногами», что загромождает и затрудняет решение.

Смотрим на наше выражение в скобках. У нас есть сложение, вычитание и деление. Со школы мы помним, что деление выполняется в первую очередь. И здесь – сначала применяем правило дифференцирования частного:



Таким образом, наша страшная производная свелась к производным двух простых выражений. Применяем первое и второе правило, здесь это сделаем устно, надеюсь, Вы уже немного освоились в производных:

****

3) **Актуализация опорных знаний (интеграция с ОДП.01Математика). Обобщим и закрепим умения и навыки вычисления производной сложной функции (записать в конспект).**

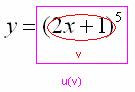
В начале вспомним, что **сложной функцией называется комбинация (суперпозиция) элементарных функций.**

Производная сложной функции равна произведению её элементарных вложений, начиная с внешнего.

Пример 2.

1. Найти производную функции http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image053.gif

Как всегда записываем:  
http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image055.gif

Разбираемся, где у нас внешняя функция, а где внутренняя. Для этого пробуем (мысленно или на черновике) вычислить значение выражения http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image057.gif при http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image023_0000.gif. Что нужно выполнить в первую очередь? В первую очередь нужно сосчитать чему равно основание: http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image059.gif, значит, многочлен http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image061.gif – и есть внутренняя функция:  
http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image063.jpg  
И, только потом выполняется возведение в степень http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image065.gif, следовательно, степенная функция – это внешняя функция:  
  
Согласно формуле http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image002_0002.gif, сначала нужно найти производную от внешней функции, в данном случае, от степени. Разыскиваем в таблице нужную формулу: http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image070.gif. Повторяем еще раз: **любой табличный шаблон справедлив не только для «икс», но и для любой дифференцируемой функции**http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image008_0002.gif. Таким образом, результат применения правила дифференцирования сложной функции  http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image002_0003.gif следующий:

http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image072.gif

Снова подчеркиваю, что когда мы берем производную от внешней функции http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image035_0000.gif, внутренняя функция http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image008_0003.gif у нас не меняется:  
http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image076.jpg  
Теперь осталось найти совсем простую производную от внутренней функции и немного «причесать» результат:

http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image078.gif

2. Найти производную функции http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image082.gif

http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image084.gif

б) Найти производную функции http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image086.gif

http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image088.gif

**4) Изучение нового материала. Рассмотрим технику дифференцирования неявной функции (записать в конспект).**

Рассмотрим другую функцию: http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image012.gif , которая задана неявно.

Здесь переменные http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image004_0002.gif и http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image006_0002.gif расположены «вперемешку». Причем **никакими способами невозможно** выразить «игрек» только через «икс».

В курсе математического анализа доказано, что неявная функция **существует** (однако не всегда), у неё есть график (точно так же, как и у «нормальной» функции). У неявной функции точно так же **существует** первая производная, вторая производная и т.д.

Все правила дифференцирования, таблица производных элементарных функций остаются в силе. Разница в одном своеобразном моменте, который мы рассмотрим прямо сейчас.

**Пример 3.**

Найти производную от функции, заданной неявно http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image012_0002.gif

1) На первом этапе навешиваем штрихи на обе части:  
http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image020.gif

2) Используем правила дифференцирования:  
http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image022.gif

3) Непосредственное дифференцирование.  
Как дифференцировать http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image024.gif и http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image026.gif совершенно понятно. Что делать там, где под штрихами есть «игреки»?

http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image028.gif – просто до безобразия, производная от функции равна её производной: http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image030.gif.

Как дифференцировать http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image032.gif  
Здесь у нас **сложная функция**. Почему? Вроде бы под синусом всего одна буква «игрек». Но, дело в том, что всего одна буква «игрек» – **САМА ПО СЕБЕ ЯВЛЯЕТСЯ ФУНКЦИЕЙ**. Таким образом, синус – внешняя функция, http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image006_0003.gif – внутренняя функция. Используем правило дифференцирования сложной функции http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image035.gif:

http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image037.gif

Произведение дифференцируем по обычному правилу http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image039.gif:

http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image041.gif

Обратите внимание, что http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image043.gif – тоже сложная функция, **любой «игрек с наворотами» – сложная функция**:

http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image045.gif

Само оформление решения должно выглядеть примерно так:  
http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image047.gif  
http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image049.gif  
Если есть скобки, то раскрываем их:  
http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image051.gif

4) В левой части собираем слагаемые, в которых есть «игрек» со штрихом. В правую часть – переносим всё остальное:  
http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image053.gif

5) В левой части выносим производную http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image055.gif за скобки:

http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image057.gif

6) И по правилу пропорции сбрасываем эти скобки в знаменатель правой части:

http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image059.gif

**5)** **Изучение нового материала. Рассмотрим технику дифференцирования функции заданной параметрически (записать в конспект).**

Если функция y = f(x) задана параметрически в виде , то её производная находится по формуле

**Пример 4.**

Найти производную функции .

Найдём производные функций и по переменной t отдельно:

= = 20 - , (производная разности равна разности производных,4 умножили на 5 и понизили степень на 1 по формуле производной степенной функции, минус переписали, 3 умножили на 6 и понизили степень на 1, производная числа равна о).

=( )' = 4∙(-) +2∙ (производная суммы равна сумме производных, 4 переписали и умножили на производную косинуса по таблице, плюс переписали, 2 переписали и умножили на производную синуса по таблице) = - 4∙ +2∙.

Теперь найдём производную всей функции по формуле:

= . Ничего не упрощается. Это ответ.

**6) Закрепление изученного материала. Решить самостоятельно (записать в конспект).**

Найти производные функций:

**7) Домашнее задание: изучить и составить конспект, решить задание:**

**№1.**

**Найти производные функций:**